Parte III

Matrices y sistemas

Capítulo 6

Matrices

6.1. Matrices. Definiciones y notación

Esta primera Sección está dedicada a la introducción de la terminología usual asociada a las matrices. En primer lugar, definimos el propio concepto de matriz sobre $\mathbb{R}$.

Definición 6.1 *Dados números naturales n y m, se dice matriz $m \times n$ a un cuadro de números reales de la forma:*

$$A = \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Habitualmente, escribiremos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cuando $m = n$, se dirá que la matriz es cuadrada de orden n. Por otro lado, de manera abreviada escribiremos $A = (a_{ij})$.

Notación: El conjunto de matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ habitualmente se denota por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, mientras que el conjunto de matrices cuadradas de orden n se denota por $M_n(\mathbb{R})$.

Una matriz $m \times n$ está formada por m $n-$tuplas, conocidas por el nombre de filas, a saber:

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & (a_{11} \ \ldots \ a_{1n}) \\ & \vdots & \\ A_m & = & (a_{m1} \ \ldots \ a_{mn}) \end{array}$$

De manera similar, podemos considerarla formada por n $m-$tuplas, llamadas columnas de la matriz:

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición 6.2 *Dada una matriz A $m \times n$, se dice traspuesta de A a la matriz $n \times m$ cuyo término (i, j) es el término (j, i) de A. Se escribe A^t.*

Definición 6.3 *Una matriz cuadrada se dice simétrica si $A^t = A$ y se dice antisimétrica si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i y j.*

Definición 6.4 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$.*

i) *Se llama diagonal principal de A a la familia $(a_{11}, \ldots, a_{ss})$ donde s es igual a la cantidad $\min\{m, n\}$.*

ii) *La matriz A se dice triangular superior si $m = 1$ o $a_{ij} = 0$, $\forall\, i > j$. Es decir, si todos los elementos por debajo de su diagonal principal son cero.*

iii) *La matriz A se dice triangular inferior si $n = 1$ o $a_{ij} = 0$, $\forall\, i < j$. Es decir, si todos los elementos por encima de su diagonal principal son cero.*

iv) *Una matriz cuadrada se dice diagonal si $a_{ij} = 0 \;\forall\, i \neq j$. En tal caso, escribiremos diag$[a_{11}, \ldots, a_{nn}]$.*

v) *Una matriz se dice escalar si es diagonal y $a_{11} = \ldots = a_{nn}$.*

vi) *Se llama matriz identidad de orden n, y se escribe I_n, a la matriz escalar cuyos términos diagonales son todos iguales a 1.*

vii) *Se dice matriz cero a la matriz cuyos términos son todos nulos. Se escribe (0).*

6.1.1. Operaciones con matrices

Repasamos, a continuación, las operaciones usuales que se pueden realizar entre y con matrices.

Definición 6.5 (Operaciones con matrices) *Se definen :*

i) **Suma de matrices***: Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, se define*
$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\,.$$

ii) **Producto de una matriz por una constante***: Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,*
$$\lambda A := (\lambda a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\,.$$

iii) **Producto de dos matrices***: Dadas matrices $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n\times t}(\mathbb{R})$, $A \cdot B$ es la matriz $m \times t$ definida por:*
$$A \cdot B := \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{1\le i\le m, 1\le j\le t}\,.$$

Si consideramos el conjunto $M_n(\mathbb{R})$ junto a las operaciones suma y producto que hemos definido anteriormente, se puede probar que éstas dotan al conjunto de estructura de anillo (no conmutativo) con elemento identidad. En este caso, las unidades del anillo reciben un nombre especial: se les llama **matrices regulares**.

6.2. Rango de una familia de vectores: op. elementales

Una solución de un sistema de ecuaciones lineales $m\times n$ es una n–tupla de elementos de $\mathbb{R}$. Por otro lado, una matriz se puede interpretar como un conjunto de vectores, es decir, elementos de algún $\mathbb{R}^n$ (fila o columna). Conviene pues, estudiar algunas nociones en torno a los vectores de $\mathbb{R}^n$. Empecemos, pues, por el principio.

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se denominan vectores y los de $\mathbb{R}$ escalares. Vectores notables son:

$$\begin{array}{ccll}
(0) & = & (0,0,\ldots,0) & \text{(vector nulo)}\\
e_1 & = & (1,0,\ldots,0) & \\
e_2 & = & (0,1,\ldots,0) & \\
\vdots & \vdots & \quad\vdots & \\
e_n & = & (0,0,\ldots,1) &
\end{array}$$

Tales vectores se suman y multiplican por escalares (es decir, elementos del cuerpo $\mathbb{R}$) en la manera conocida.

El objetivo final de la Sección es el de definir el concepto de rango de una familia de vectores en $\mathbb{R}^n$ y diseñar un algoritmo para su cálculo. Pero antes, una definición:

Definición 6.6 *Una familia $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ se dice:*

i) *libre si*

$$t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n = (0) \Longrightarrow t_1 = \ldots = t_n = 0,$$

ii) *y ligada si no es libre.*

Ejemplo 6.7 i) *La familia $\{(1,2),(3,2)\}$ de vectores de $\mathbb{R}^2$ es una familia libre.*

ii) *La familia $\{(1,2,3),(2,1,0),(1,-1,-3)\}$ es una familia ligada, pues se verifica $(1,-1,-3) = -(1,2,3) + (2,1,0)$.*

iii) *Cualquier familia que contenga al vector nulo es ligada.*

iv) *Cualquier familia que contenga vectores repetidos es ligada.*

El siguiente Lema técnico, cuya prueba dejamos como ejercicio, lo utilizaremos en el resultado principal de esta Sección (Proposición 6.11).

Lema 6.8 *Si $\{v, v_1, \ldots, v_m\}$ es ligada y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es libre, existen escalares t_i tales que $v = t_1 v_1 + \ldots + t_m v_m$.*

Llegados a este punto, podemos definir el concepto de rango que es clave en el desarrollo del resto del Capítulo.

Definición 6.9 (Rango de una familia de vectores) *Dada una familia de vectores de $\mathbb{R}^n$, se dice rango al máximo tamaño de sus subfamilias libres.*

Ejemplo 6.10 *El rango de la familia $\{(0,0,0),(1,2,3),(\pi,\sqrt{2},1),(1,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$ es 2, pues cualquier familia con mayor número de elementos contendrá al vector nulo o dos vectores repetidos y la subfamilia $\{(1,2,3),(\pi,\sqrt{2},1)\}$ es libre.*

Aunque en el ejemplo anterior nos ha sido sencillo el cálculo del rango, en general, ésta no es una tarea sencilla utilizando como única herramienta la definición. El algoritmo que estudiaremos para el cálculo del rango está basado en el concepto de operación elemental que se presenta en la siguiente Proposición:

Proposición 6.11 (Operaciones elementales de vectores) *Dada una familia $\mathcal{V} := \{v_1, \ldots, v_m\}$ de vectores de $\mathbb{R}^n$, las siguientes operaciones no alteran el rango de la misma:*

I) *Intercambiar el orden de dos vectores.*

II) *Sustituir un vector por él más un múltiplo de otro.*

III) *Multiplicar un vector por un escalar no nulo.*

Las operaciones anteriores las llamaremos operaciones de tipo 1, 2 y 3 respectivamente.

Demostración.– Siendo evidente que las operaciones de tipo 1 no alteran el rango, estudiaremos qué es lo que ocurre con las de tipo 2 y de tipo 3, empezando por estas últimas. Supongamos la operación de tipo 3

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \longrightarrow \{sv_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

y veamos que no varía el rango. Sea r el rango de $\mathcal{V}$ y veamos que

$$\mathrm{rang}(\{sv_1, \ldots, v_n\}) \geq r. \tag{6.1}$$

Si existe una familia libre de $\mathcal{V}$ con r vectores que no contenga a v_1, ha de ser subfamilia libre de $\{sv_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y, por lo tanto, se verifica la desigualdad (6.1). Si no, sea $\{v_1, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}\}$ una familia libre con r vectores que debe existir. Entonces la familia $\{sv_1, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}\}$ es subfamilia libre de $\{sv_1, v_2, \ldots, v_n\}$: si existieran $t_1, t_2, \ldots, t_r$ no todos nulos tales que

$$t_1 s v_1 + t_2 v_{i_2} + \cdots + t_r v_{i_r} = (0)$$

se tendría que la familia $\{v_1, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}\}$ es ligada. Por lo tanto, también en este segundo caso, se verifica (6.1).
Por otro lado,

$$\mathrm{rang}(\{sv_1, v_2, \ldots, v_n\}) \leq \mathrm{rang}(\{s^{-1}sv_1, v_2, \ldots, v_n\}) = \mathrm{rang}(\mathcal{V}) \tag{6.2}$$

Uniendo las desigualdades (6.1) y (6.2) se concluye que

$$\mathrm{rang}(\{sv_1, v_2, \ldots, v_n\}) = \mathrm{rang}(\mathcal{V}).$$

Para las operaciones de tipo 2 podemos suponer que la operación es:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \longrightarrow \{v_1 + tv_2, v_2, \ldots, v_n\}$$

Probaremos, como hicimos antes, que

$$r = \mathrm{rang}(\mathcal{V}) \leq \mathrm{rang}(\{v_1 + tv_2, v_2, \ldots, v_n\}).$$

Si existe una subfamilia libre de $\mathcal{V}$ que no contenga a v_1, nada habría que probar. En caso contrario, sea $\{v_1, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}\}$ una familia libre con r vectores que debe existir;

entonces $\{v_2, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}\}$ es ligada y, según el Lema 6.8 $v_2 = t_2 v_{i_2} + \cdots + t_r v_{i_r}$. Ahora, veamos que $\{v_1 + tv_2, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}\}$ es una subfamilia libre de $\{v_1 + tv_2, v_2, \dots, v_n\}$. Si fuese ligada, existirían números reales $s_1, s_2, \dots, s_r$, no todos nulos y con $s_1 \neq 0$, tales que:

$$s_1(v_1 + tv_2) + s_2 v_{i_2} + \cdots + s_r v_{i_r} = (0).$$

Uniendo lo anterior al hecho de que $v_2 = t_2 v_{i_2} + \cdots + t_r v_{i_r}$, se llega a que

$$s_1 v_1 + (s_2 + tt_2)tv_2 + \cdots + (s_r + tt_r)v_{i_r} = (0),$$

lo que contradice el hecho de que la familia $\{v_1, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}\}$ sea libre. Por lo tanto,

$$r = \text{rang}(\mathcal{V}) \leq \text{rang}(\{v_1 + tv_2, v_2, \dots, v_n\}).$$

Por otro lado,

$$\text{rang}(\{v_1 + tv_2, v_2, \dots, v_n\}) \leq \text{rang}(\{v_1 + tv_2 - tv_2, v_2, \dots, v_n\}) = \text{rang}(\mathcal{V}).$$

■

6.3. Rango por filas y por columnas de una matriz

Las definiciones de rango por filas y por columnas de una matriz $A \in M_{m\times n}$ son las esperables, es decir, el rango por filas de A, escrito $r_f(A)$, es el rango de las filas de A vistas como vectores de $\mathbb{R}^n$, mientras que el rango por columnas, escrito $r_c(A)$ es el rango de las columnas de A vistas como vectores de K^m.

Definición 6.12 *Una matriz $m \times n$ se dice escalonada por filas si $m = 1$ o:*

- *Sus filas cero son las últimas.*
- *El primer elemento no nulo de cada fila no nula, denominado pivote, está a la derecha del pivote de la fila superior.*

En virtud de la definición, las matrices escalonadas por filas tienen la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2h} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rs} & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

Definición 6.13 *Una matriz A $m \times n$ se dice reducida por filas si es escalonada por filas y además:*

i) *Sus pivotes son todos* 1.

ii) *En la columna que ocupa cada pivote, los elementos anteriores a éste son todos cero.*

Definición 6.14 *Una matriz A $m\times n$ se dice reducida (respectivamente escalonada) por columnas si su traspuesta lo es por filas.*

Ejemplo 6.15 *1.- La matriz* 4×5

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es escalonada por filas pero no reducida.}$$

2.- La matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es triangular superior, pero no escalonada por filas.}$$

3.- La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es reducida por filas.}$$

Observación 6.16 *El interés de las matrices escalonadas reside en el hecho de su rango por filas se lee directamente (basta contar el número de filas no nulas). El interés de las matrices reducidas es que se corresponden con sistemas fácilmente resolubles.*

En virtud de lo discutido hasta ahora,

Teorema 6.17 *Sea $A \in M_{m\times n}$. Son equivalentes:*

i) $r_f(A) = r$

ii) *Existe un número finito de operaciones elementales (de tipo* 1 *y* 2*) en las filas de* A *que conducen a una matriz escalonada por filas con, exactamente, las* $m-r$ *últimas filas nulas.*

iii) *Existe un número finito de operaciones elementales en las filas de* A *que conducen a una matriz reducida por filas con, exactamente, las* $m-r$ *últimas filas nulas.*

Demostración.– Para probar que ii) implica iii), sea F la matriz obtenido en ii) y c_i el pivote de la fila i. Multiplicando la fila por c_i^{-1} hacemos que el pivote sea 1. Ahora, haciendo operaciones elementales en las filas, es fácil conseguir que todos los elementos por encima de cada pivote sean cero.

Es también claro que iii) implica i) (ya que las operaciones elementales no varían el rango por filas). Por lo tanto, únicamente queda ver que i) implica ii). Para probarlo, razonaremos por inducción en m (número de filas) construyendo, de paso, un algoritmo para el cálculo del rango por filas.

Si $m = 1$ la implicación es obvia, pues estaríamos ante una matriz fila.

Supongamos que $m > 1$; si la matriz es la matriz nula, nada habría que hacer. Si la matriz no es nula, sea A^j la primera columna no cero y a_{ij} el primer término no nulo de dicha columna. Entonces, permutando la fila i y la fila 1, si $i \neq 1$, podemos situar a_{ij} en el lugar $(1, j)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ahora, mediante operaciones elementales en las filas de A_1 (restándole a la fila $k-$ésima, la primera multiplicada por a_{kj}/a_{ij})) podemos hacer ceros en la columna j por debajo del pivote de la primera fila. Llegamos así a una matriz B de la forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si llamamos C a la submatriz de B formada por las filas $2, \ldots, m$ y por las columnas $j+1, \ldots, n$, es claro que ésta tiene rango $r-1$. Aplicando la hipótesis de inducción, existirán un número finito de operaciones elementales en las filas de C que conducen a una matriz E escalonada por filas con las $m-r$ últimas filas nulas. Ahora, la matriz:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & & E & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & & \end{pmatrix}$$

es escalonada por filas. Basta notar, para acabar, que hacer operaciones elementales en C equivale a hacer operaciones en B. ■

Para comprender cómo funciona el algoritmo subyacente a la demostración de la Proposición inmediatamente anterior, apliquémoslo a un ejemplo concreto:

Ejemplo 6.18 *Calcúlese el rango por filas de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

En este caso, la primera columna no nula es la primera y el primer elemento de la misma es también el primero. Debemos hacer ceros por debajo del elemento $(1,1)$ *de la matriz. Para ello, a la segunda fila le restamos la primera multiplicada por* 2*, a la tercera la primera multiplicada por* 3 *y a la cuarta la primera multiplicada por* 6*, llegando a la matriz:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora, la primera columna no nula de la submatriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -4 & -8 & 3 \\ -4 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

es la primera cuyo primer elemento no nulo es el segundo. Así debemos intercambiar las filas primera y segunda de la submatriz C *o, lo que es lo mismo, las filas segunda y tercera de* A_1*. Llegamos así a la matriz*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora restando a la cuarta fila de A_2 *la segunda, llegamos a*

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por último, restando a la cuarta fila de A_3 *la tercera, llegamos a la matriz escalonada por filas*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

luego el rango por filas de A *es* 3*. Aunque ya hayamos contestado a la pregunta sobre el rango, continuamos el proceso para llegar a una matriz reducida por filas. En primer lugar, dividimos, para obtener pivotes* 1*, la segunda fila por* -4 *y la tercera por* -3*:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, hacemos cero el elemento que se encuentra por encima del segundo pivote: para ello, le restamos a la primera fila la segunda multiplicada por 2*, llegando a*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último, queda por hacer ceros los elementos situados por encima del último pivote. Para conseguirlo, le sumamos a la primera fila la tercera y a la segunda la tercera multiplicada por -2*. Se llega, de este modo a la matriz reducida por filas:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/6 \\ 0 & 1 & 0 & 7/12 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 6.19 Mutatis mutandi*, todo lo dicho hasta ahora para el rango por filas, puede decirse igualmente para el rango por columnas. Por ejemplo, el Teorema 6.17 anterior y su demostración se trasladan al caso de columnas cambiando la palabra fila por la palabra columna.*

En otro orden de cosas es fácil probar, a partir del Teorema 6.17 los dos corolarios siguientes (que pueden ser escritos igualmente en términos de columnas):

Corolario 6.20 *Si $r_f(A) = r$ y A es escalonada por filas, un número finito de operaciones elementales en las columnas de A conducen a la matriz*

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que denotaremos por $[I_r, 0]$.

Ahora, juntando el Teorema 6.17 con el Corolario inmediatamente anterior se tiene:

Corolario 6.21 *Si $r_f(A) = r$, existe un número finito de operaciones elementales en filas y columnas de A que conducen a la matriz $[I_r, 0]$.*

6.4. Rango de una matriz. Matrices elementales

En esta Sección trataremos de mostrar que los rangos por fila y por columna introducidos en la Sección anterior son iguales. Para llegar a ello, en primer lugar veremos como "simular"mediante productos de matrices las operaciones elementales tanto en filas como en columnas. Con este fin, se introducen las conocidas como matrices elementales.

6.4.1. Matrices elementales

Empecemos definiendo las ya anunciadas matrices elementales:

Definición 6.22 (Matrices elementales) *Se dice matriz elemental de orden n:*

i) *de tipo 1, P_{ij}, a la matriz que resulta de permutar en la matriz identidad (I_n) las filas i y j;*

ii) *de tipo 2, $P_{ij}(t)$ ($i \neq j$), a la matriz que resulta de sumarle a la fila i de la matriz identidad (I_n), la fila j multiplicada por t;*

iii) *de tipo 3, $Q_i(s)$, a la matriz que resulta de multiplicar la fila i de la matriz identidad (I_n) por un escalar s distinto de cero.*

Estas matrices elementales simulan, como ya hemos adelantado, las operaciones elementales:[1]

[1]La demostración de la Proposición 6.23 no aporta gran cosa, luego asumiremos su veracidad. Sin embargo, resulta de interés que uno se convenza de su veracidad, verificándola en ejemplos concretos.

Proposición 6.23 *Sea A una matriz $m \times n$. Entonces,*

i) *$P_{ij}A$ es la matriz que resulta de permutar en A las filas i y j.*

ii) *AP_{ij} es la matriz que resulta de permutar en A las columnas i y j.*

iii) *$P_{ij}(t)A$ es la matriz que resulta de sumarle a la fila i de A la fila j multiplicada por t.*

iv) *$AP_{ij}(t)$ es la matriz que resulta de sumarle a la columna j de A la columna i multiplicada por t.*

v) *$Q_i(s)A$ es la matriz que resulta de multiplicar la fila i de A por s.*

vi) *$AQ_i(s)$ es la matriz que resulta de multiplicar la columna i de A por s.*

Por otro lado, puesto que toda operación elemental es *reversible*, se tiene:

Corolario 6.24 *Las matrices elementales son regulares. En concreto,*

i) $P_{ij}P_{ji} = I_n$.

ii) $P_{ij}(t)P_{ij}(-t) = I_n$.

iii) $Q_i(s)Q_i(s^{-1}) = I_n$.

Rescribiendo los resultados obtenidos en la Sección anterior (Teorema 6.17 y los corolarios subsiguientes) con el nuevo lenguaje introducido, se tiene:

Corolario 6.25 *Sea $A \in M_{m\times n}(K)$ de rango por filas r. Entonces,*

i) *Existen matrices elementales $P_1, \dots, P_t$ tales que*

$$P_t \cdots P_1 A = F \text{ es escalonada por filas.}$$

ii) *Existe una matriz regular P tal que*

$$PA = F \text{ es escalonada por filas.}$$

iii) *Existen matrices elementales $P_1, \dots, P_t$, $Q_1 \dots, Q_s$ tales que*

$$P_t \cdots P_1 A Q_1 \cdots, Q_s = [I_r, 0].$$

iii) *Existen matrices regulares P y Q tales que*

$$PAQ = [I_r, 0].$$

Observación 6.26 *Al igual que ocurría con la sección anterior, lo dicho para el rango por filas en el resultado anterior, se traslada, de forma inmediata, al rango por columnas.*

6.4.2. Rango de una matriz

El resultado contenido en el Corolario 6.25 es la clave para probar que rango por filas y por columnas son iguales.

Teorema 6.27 *Sea A una matriz de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces, el rango por filas y el rango por columnas de A coinciden. A esta cantidad se le conoce como rango de A y lo denotaremos por $rg(A)$. En particular, se tiene que $rg(A) = rg(A^t)$.*

Demostración.– Llamemos r al rango por filas de A. Entonces, existe una matriz regular P tal que $PA = F$ es escalonada por filas con las últimas $m - r$ filas nulas. Si tomamos las columnas de F en las que se encuentran los pivotes, éstas son linealmente independientes, luego se tiene $r \leq r_c(F)$.

Por otro lado, sea $s = r_c(F)$ y $F^{j_1}, \ldots, F^{j_s}$ s columnas de F que forman familia libre. En tal caso, puesto que $A = P^{-1}F$, la columna j−ésima de A, A^j, es igual a $A^j = P^{-1}F^j$. En consecuencia,

$$\sum_{k=0}^{s} c_k A^{j_k} = (0) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{s} c_k F^{j_k} = (0) \Longrightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0.$$

De lo anterior se deduce que $r_c(F) = s \leq r_c(A)$; luego, por lo tanto, $r_f(A) \leq r_c(A)$. Ahora, aplicando esta desigualdad a la matriz transpuesta, se concluye que $r_c(A) \leq r_f(A)$ y, finalmente, la igualdad de rangos por fila y por columna. ■

El Teorema 6.27 nos permite deducir algunos resultados de interés, que enunciamos a continuación.

Corolario 6.28 *El rango de cualquier familia de $\mathbb{R}^n$ es menor o igual que n.*

Corolario 6.29 *Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es regular si, y sólo si, $rg(A) = n$.*

Demostración.– Supongamos, en primer lugar, que la matriz es regular y sea

$$t_1A^1 + t_2A^2 + \cdots + t_nA^n$$

una combinación lineal de sus columnas. Si se iguala esta combinación al vector nulo, se tendrá que

$$A \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = (0),$$

de donde, multiplicando la igualdad por A^{-1}, se tiene que $t_1 = \ldots = t_n = 0$. En consecuencia, las columnas de A forman una familia libre y, por lo tanto, $rg(A) = n$.

Recíprocamente, si suponemos que el rango de A es n, existirán, por el Corolario 6.25, matrices regulares P y Q tales que $PAQ = I_n$. De esta igualdad se deduce que $A = P^{-1}Q^{-1}$. Por lo tanto, A es regular. ■

De más fácil prueba es el último resultado que presentaremos en esta Sección:

Corolario 6.30

i) *Hacer operaciones elementales en las filas y/o las columnas de una matriz no varía su rango.*

ii) *Una matriz cuadrada es regular si, y sólo si, es producto de matrices elementales.*

iii) *Si P y Q son matrices regulares y A es otra matriz $rg(PA) = rg(A) = rg(AQ) = rg(PAQ)$; es decir, el producto por matrices regulares no altera el rango.*

6.4.3. Aplicación al cálculo de inversas de matrices regulares

Los resultados anteriores son útiles para calcular la inversa de una matriz regular. Si A es regular, es producto de matrices elementales:

$$A = P_1 \dots P_r,$$

luego

$$I_n = P_r^{-1} \dots P_1^{-1} A.$$

Así pues,

$$A^{-1} = P_r^{-1} \dots P_1^{-1} = P_r^{-1} \dots P_1^{-1} I_n$$

y dado que la inversa de una matriz elemental es elemental (véase Corolario 6.24), haciendo operaciones elementales en las filas de A es posible obtener la matriz elemental. Realizando exactamente las mismas operaciones sobre la matriz identidad, se obtiene la inversa de A.

Los cálculos puede efectuarse al mismo tiempo de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|c} Q_r \dots Q_1 A = I_n & Q_r \dots Q_1 I_n = A^{-1} \end{array} \right)$$

Ejemplo 6.31 *Calcular la inversa de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} P_{31}(-3/2) \\ P_{21}(-5/2) \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -4 & -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & -7/2 & -4 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} P_{32}(-7/3) \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & -4 & -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16/3 & 13/3 & -7/3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} P_{23}(3/4) \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 3/4 & -3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 16/3 & 13/3 & -7/3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} P_{13}(-3/4) \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & -9/4 & 7/4 & -3/4 \\ 0 & -3/2 & 0 & 3/4 & -3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 16/3 & 13/3 & -7/3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} P_{12}(2) \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -3/4 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & -3/2 & 0 & 3/4 & -3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 16/3 & 13/3 & -7/3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} Q_3(3/16) \\ Q_2(-2/3) \\ Q_1(1/2) \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/8 & 1/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 13/16 & -7/16 & 3/16 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/8 & 1/8 & 3/8 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 13/16 & -7/16 & 3/16 \end{pmatrix}$$

6.5. Problemas propuestos

Problema 6.1 .- Probar que:

- $(AB)^t = B^t A^t$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Problema 6.2 .- Probar que las únicas matrices cuadradas que conmutan con todas las demás son las matrices escalares, es decir, las matrices diagonales con el mismo elemento en la diagonal.

Problema 6.3 .- Probar que el producto de matrices triangulares superiores (respectivamente, inferiores) es una matriz triangular superior (respectivamente, inferior). Asimismo, demostrar que la inversa de una matriz tringular superior (respectivamente, inferior) regular es triangular superior (respectivamente, inferior).

Problema 6.4 .- Calcula B^{-1}, sabiendo que se cumple que $\left(\frac{1}{2}(B-I)\right)^2 = \frac{1}{2}(B-I)$.

Problema 6.5 .- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices B tales que $AB = BA$.

Problema 6.6 .- Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Problema 6.7 .- Según los valores de a y de b, discutir el rango de las matrices:

$$\begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & 1 & a-1 \\ a+1 & 0 & a+1 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b & a & b & a+b+1 \\ 2 & 3b & a & 2b & 3a+2b+1 \\ 1 & b & 2a & 2b & 2b+2 \\ 1 & 2b & 0 & 2b & a+2b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & a & b \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & -b & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 6.8 .- Hemos demostrado que, dada una matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ con rango r, existen matrices regulares P y Q tales que:

$$PAQ = [I_r, 0].$$

Dar una algoritmo para el cálculo de tales matrices P y Q.

Problema 6.9 (Factorización LU) .- Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Demostrar que existen matrices $L \in M_m(\mathbb{R})$ triangular inferior con 1 en la diagonal principal, $U \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ triangular superior y P matriz permutación[2] tales que $PA = LU$. Dar un algoritmo para el cálculo de dichas matrices L y U.
(*Indicación:* Téngase en cuenta que las matrices escalonadas por filas son triangulares superiores.)

Problema 6.10 .- Calcular las inversas de las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 6.11 .- Discutir, en función de los parámetros a y b, si las matrices de coeficientes reales

$$\begin{pmatrix} a & 2a & 1 \\ 3a & -1 & a+2 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2b & a+b \\ 4a & 5b & 2a+2b \\ 7a & 8b & 2a+2b \end{pmatrix}$$

son regulares y, en su caso, calcular la inversa.

Problema 6.12 .- Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & n & \cdots & 5 & 4 & 3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 & n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

[2]Una matriz permutación es una matriz producto de matrices elementales de tipo 1.

Problema 6.13 .- Sea la matriz cuadrada de talla n cuyo término (i, j) es 2 si $i \neq j$ e i si $i = j$. Calcular su determinante.

Problema 6.14 .- Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior con la matriz cuadrada de talla n cuyo cuyo término (i, j) es a si $i \neq j$ y t si $i = j$.

Capítulo 7

Sistemas de ecuaciones lineales

7.1. Combinación lineal. Variedades lineales

El Capítulo está dedicado a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Pensemos, pues, en un sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{7.1}$$

Usando la terminología habitual en estos casos, llamaremos matriz de coeficientes a la matriz $A = (a_{ij})$ y vector de términos independientes a la matriz columna $b = (b_1, \ldots, b_m)^t$. De esta forma, podemos escribir, denotando $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$, el sistema en la forma $AX = b$.

El sistema (7.1) tiene solución si, y sólo si, existen escalares $t_1, \ldots, t_n$ tales que

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + t_n \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

De esta observación casi trivial surge el concepto de combinación lineal de vectores:

Definición 7.1 *Dada una familia de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ en $\mathbb{R}^m$, diremos que el vector v es combinación lineal de la familia si existen escalares $t_1, \ldots, t_n$ tales que:*

$$v = t_1v_1 + \ldots + t_nv_n.$$

Con este nuevo lenguaje, el sistema (7.1) tiene solución si, y sólo si, el vector de términos independientes es c.l.[1] de las columnas de la matriz de coeficientes.

[1]A partir de ahora, la abreviación c.l. significará combinación lineal

Definición 7.2 *Se dice variedad lineal a un subconjunto S de $\mathbb{R}^m$ para el que existen vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ cuyo conjunto de combinaciones lineales es justamente S. Se escribe $S = \mathbb{R} < v_1, \ldots, v_n >$ y se dice que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un sistema generador de S. Si el* sistema generador *es una familia libre, se le denomina* base*. Por convenio, $\emptyset$ es la única base de* (0).

Un resultado de utilidad es el siguiente:

Proposición 7.3

$$u \in \mathbb{R} < v_1, \ldots, v_n > \Longleftrightarrow rg(v_1, \ldots, v_n) = rg(v_1, \ldots, v_n, u)$$

Demostración.– Supongamos, en primer lugar, que $u \in \mathbb{R} < v_1, \ldots, v_n >$. Entonces, haciendo operaciones elementales podemos transformar la familia $\{v_1, \ldots, v_n, u\}$ en la familia $\{v_1, \ldots, v_n, 0\}$, de donde se sigue la igualdad de rangos.

Recíprocamente, sea r el rango común de ambas familias y sea $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}$ una familia libre de $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Como $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}, u\}$ es ligada, aplicando el Lema 6.8, se sigue que u es c.l. de los vectores $v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}$. ■

Reinterpretando el resultado anterior en términos de sistemas de ecuaciones, se tiene que un sistema $AX = b$ tiene solución si, y sólo si, el rango de la matriz $(A|b)$ es igual al rango de A.

Proposición 7.4 *Dos bases cualesquiera de una variedad lineal S tienen la misma cantidad de vectores. A esta cantidad se le dice* dimensión *de la variedad lineal y se escribe $dimS$.*

Corolario 7.5 *Dada una familia de vectores, sea r su rango y S la variedad lineal que generan. Entonces:*

I) *Existe una subfamilia r de vectores que es base de S.*

II) *Toda familia libre de S posee a lo sumo r vectores.*

III) *Toda familia libre de S con r vectores es base.*

Nota: El escalonamiento por filas proporciona un algoritmo para el cálculo de una base de una variedad lineal S a partir de un sistema generador: se construye una matriz cuyas filas sean los vectores dados y se escalona por filas; las filas no nulas de la matriz escalonada por filas forman una base de S.

7.2. Nulidad de una matriz

En la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, aparecen dos variedades lineales claves asociadas a la matriz de coeficientes. En primer lugar, la variedad generada por las columnas de dicha matriz (ya que la pertenencia, o no, a dicha variedad lineal del vector de términos independientes marca la existencia, o no, de solución) y la variedad lineal conocida como **nulidad** o **subespacio nulo.**

Definición 7.6 *Se dice nulidad o subespacio nulo de una matriz* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *al conjunto de soluciones del sistema homogéneo* $AX = (0)$*. Se escribe* $\mathcal{N}(A)$*.*

Teorema 7.7 *Si* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *es una matriz de rango* r*,* $\mathcal{N}(A)$ *es una variedad lineal de dimensión* $n-r$*. Además, si* N *es una matriz regular tal que*

$$AN = [B, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-r}],$$

sus últimas $n-r$ *columnas constituyen una base de la nulidad de* $\mathcal{N}(A)$*.*

Demostración.– Sean P y Q matrices regulares tales que $PAQ = [I_r, 0]$. Es claro, por lo tanto, que las columnas $Q^{r+1}, \ldots, Q^n$ de Q forman una familia libre de $\mathcal{N}(A)$ y que en consecuencia $\mathbb{R} < Q^{r+1}, \ldots, Q^n > \subseteq \mathcal{N}(A)$.

Por otro lado, sea $S \in \mathcal{N}(A)$. Como las columnas de Q son base de K^n, podemos escribir S como c.l. de éstas, es decir,

$$S = t_1 Q^1 + \ldots + t_n Q^n.$$

Multiplicando a la izquierda la igualdad por A se obtiene

$$(0) = t_1 AQ^1 + \ldots + t_n AQ^n,$$

lo que implica, multiplicando ahora a la izquierda por P que

$$(0) = \sum_{j=1}^{n} t_j PAQ^j \Longrightarrow \sum_{j=1}^{r} t_j e_j = (0) \Longrightarrow t_j = 0 \ , \ j = 1, \ldots, r.$$

Es decir, que S es c.l. de $Q^{r+1}, \ldots, Q^n$, con lo que $S \in \mathbb{R} < Q^{r+1}, \ldots, Q^n >$ completando la demostración. ■

Observación 7.8 *Basados en el Teorema anterior, podemos diseñar una algoritmo para calcular una base de la nulidad de una matriz dada* $A \in M_{m\times n}(K)$*:*

Construida la matriz

$$\begin{pmatrix} A \\ -- \\ I_n \end{pmatrix},$$

la escalonamos por columnas llegando a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} G \\ -- \\ N \end{pmatrix},$$

siendo G escalonada por columnas. Si r es el número de columnas no nulas de G, las últimas $n-r$ columnas de N forman una base de la nulidad de A

Ejemplo 7.9 *: Calcular una base de la nulidad de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el algoritmo propuesto, construimos la matriz $\begin{pmatrix} A \\ -- \\ I_n \end{pmatrix}$:

y la escalonamos por columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{P_{12}(-1) \\ P_{13}(-2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{P_{32}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{P_{24}(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R} < (-2, 0, 1, 1) >$.

7.3. Teorema de Rouché-Fröbenius

Tras el resultado fundamental sobre la nulidad, estamos en condiciones de discutir completamente la existencia y unicidad de solución de los sistemas de ecuaciones lineales:

Teorema 7.10 (Rouché-Fröbenius) *Sea $AX = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Entonces,*

i) El sistema tiene solución si, y sólo si, $rg(A) = rg(A|b)$.

ii) Si $(s_1, \ldots, s_n)$ es una solución, el conjunto de soluciones es:

$$\{(t_1, \ldots, t_n) : (t_1, \ldots, t_n) - (s_1, \ldots, s_n) \in \mathcal{N}(A)\},$$

es decir, dos soluciones cualesquiera del sistema se diferencian en un elemento de la nulidad de la matriz de coeficientes.

iii) Si existe solución, es única si, y sólo si, $rg(A) = n$.

Observación 7.11 *A partir del Teorema de Rouché-Frobenius, podemos expresar el conjunto de soluciones de un sistema $AX = b$ en la forma*

$$(t_1, \ldots, t_n) + \mathcal{N}(A),$$

donde $(t_1, \ldots, t_n)$ es una solución particular cualquiera del sistema.

7.4. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Si $AX = B$ es un sistema compatible de n incógnitas con rango de A igual a r, el método de resolución que propondremos aquí consiste en la resolución de $n - r + 1$ sistemas en los que la matriz de coeficientes es triangular superior y regular. Para llegar a esto, antes una pequeña observación:

Observación 7.12 *Si $AX = b$ es un sistema y realizamos operaciones elementales en las filas de $(A|b)$ obteniendo una matriz $(C|d)$, el conjunto de soluciones de los sistemas $AX = b$ y $CX = d$ es el mismo, como no es difícil comprobar.*

El objetivo primero será, en consecuencia, intentar simplificar el sistema sin modificar el conjunto de soluciones y, en un segundo término, encontrar una solución particular y una base de la nulidad de A. Antes de explicar cómo haremos esto, un pequeño ejemplo: supongamos dado el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & t & + & w & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & + & t & + & 3w & = & 3 \\ x & + & 3y & & & + & t & + & 2w & = & 2 \end{array}\right.$$

Aplicando el proceso de escalonamiento por filas se llega al sistema equivalente[2]:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & t & + & w & = & 0 \\ & & 2y & - & 2z & & & + & w & = & 2 \\ & & & - & 3z & - & t & + & w & = & 3 \end{array}\right.$$

¿Cómo calcular ahora una solución particular? ¿Cómo hallar una base de la nulidad de la matriz de coeficientes?

Si en el último de los sistemas, hacemos $t = 0$ y $w = 0$, es decir, escogemos las columnas correspondientes a los pivotes, nos quedamos con el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 2y & - & 2z & = & 2 \\ & & & - & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

que es un sistema cuadrado, triangular superior, compatible y determinado cuya solución es: $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$. En consecuencia, $(2, 0, -1, 0, 0)$ es una solución particular del sistema inicial. No queda más que encontrar una base de la nulidad, es decir, una base del conjunto de soluciones del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & + & t & + & w & = & 0 \\ & & 2y & - & 2z & & & + & w & = & 0 \\ & & & - & 3z & - & t & + & w & = & 0 \end{array}\right. \tag{7.2}$$

Una solución la podemos encontrar haciendo $t = 0$ y $w = 1$ y resolviendo el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ & & 2y & - & 2z & = & -1 \\ & & & - & 3z & = & -1 \end{array}\right.$$

cuya única solución es $x = -3/2$, $y = -1/6$, $z = 1/3$. En consecuencia, el vector $V_1 = (-3/2, -1/6, 1/3, 0, 1)$ es un vector de la nulidad de la matriz de coeficientes. Como la dimensión de esta nulidad es dos (el número de incógnitas es 5 mientras que el rango de la matriz de coeficientes es 3), necesitamos otra solución, V_2, que forme familia libre con V_1. Para ello hacemos $t = 1$ y $w = 0$ en (7.2) obteniendo :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ & & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & & - & 3z & = & 1 \end{array}\right.$$

cuya única solución es $x = 0$, $y = -1/3$,$z = -1/3$. Así pues, podemos tomar $V_2 = (0, -1/3, -1/3, 1, 0)$.

De esta forma, la solución es:

[2]Dos sistemas se dicen equivalentes si su conjunto de soluciones es el mismo

$$(2,0,-1,0,0)+\mathbb{R}<(-3/2,-1/6,1/3,0,1),(0,-1/3,-1/3,1,0)>=$$
$$=(2,0,-1,0,0)+\mathbb{R}<(-9,-1,2,0,6),(0,-1,-1,3,0)>$$

o, dicho de otro modo,

$$\left\{\begin{array}{l} x=2-9\lambda \\ y=-\lambda-\mu \\ z=-1+2\lambda-\mu \\ t=3\mu \\ w=6\lambda \end{array}\right. \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{Q}$$

El método aplicado en el ejemplo es extensible a cualquier sistema de ecuaciones lineales dando lugar al algoritmo que exponemos a continuación:

Algoritmo de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Sea $AX=b$ con $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se hace:

I) Reducir por filas la matriz ampliada $(A|b)$ llegando a una matriz $(C|d)$.

II) *a*) Si $rg(C|d)\neq rg(C)$, el sistema no tiene solución.

b) Si $rg(C|d)=rg(C)=n$, el sistema tiene una única solución y, además, $CX=d$ es un sistema triangular superior, resoluble yendo "de abajo a arriba".

c) Si $rg(C|d)=rg(C)=r<n$, el sistema posee infinitas soluciones que podemos describir en la forma $(t_1,\ldots,t_n)+\mathcal{N}(A)$ con $(t_1,\ldots,t_n)$ una solución cualquiera del sistema y $dim\,\mathcal{N}(A)=n-r$.

1) Para calcular la solución particular, sean $x_{i_1},\ldots x_{i_r}$ las incógnitas correspondientes a las r columnas que contienen los pivotes. Haciendo cero el resto de incógnitas y resolviendo el sistema triangular inferior regular que nos queda, obtenemos una solución particular.

2) Para obtener $n-r$ soluciones linealmente independientes de $AX=(0)$ procedemos de la siguiente forma:
Sean $x_{j_1},\ldots x_{j_{n-r}}$ las incógnitas correspondientes a las columnas no ocupadas por los pivotes. Para cada k, resolvemos el sistema que se obtiene al hacer $x_{j_k}=1$ y el resto de las incógnitas correspondientes cero en $AX=(0)$. Es fácil ver que las $n-r$ soluciones del sistema homogéneo así obtenidas son linealmente independientes.

Ejemplo 7.13 *Discutir y resolver el sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (a+2)x & + & y & + & z & = & a-1 \\ ax & + & (a-1)y & + & z & = & a-1 \\ (a+1)x & & & + & (a+1)z & = & a-1 \end{array}\right.$$

La matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & 1 & 1 & a-1 \\ a & a-1 & 1 & a-1 \\ a+1 & 0 & a+1 & a-1 \end{array}\right)$$

Para obtener un 1 en el lugar $(1,1)$ de la matriz, intercambiamos las columnas primera y segunda, tomando nota del cambio de orden introducido de esta manera en las incógnitas:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+2 & 1 & a-1 \\ a-1 & a & 1 & a-1 \\ 0 & a+1 & a+1 & a-1 \end{array}\right) \end{array} \tag{7.3}$$

Restándole a la segunda fila la primera multiplicada por $a-1$ se llega a

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+2 & 1 & a-1 \\ 0 & 2-a^2 & 2-a & (a-1)(2-a) \\ 0 & a+1 & a+1 & a-1 \end{array}\right) \end{array} \tag{7.4}$$

Llegados a este punto distinguimos dos casos:

Caso 1: $a=-1$.- En este caso, la matriz del paso anterior (7.4) es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

luego en este caso el sistema es incompatible.

Caso 2: $a \neq -1$.- Como $a \neq -1$, podemos dividir la tercera fila por $a+1$ e intercambiar posteriormente las filas segunda y tercera para obtener:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+2 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{a-1}{a+1} \\ 0 & 2-a^2 & 2-a & (a-1)(2-a) \end{array}\right) \end{array}$$

y, restándole a la tercera fila la segunda multiplicada por $2-a^2$ se llega a la matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+2 & 1 & a-1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{a-1}{a+1} \\ 0 & 0 & a^2-a & \frac{a^2-a}{a+1} \end{array}\right) \end{array} \tag{7.5}$$

Llegados a este punto, se observa que si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Resolviéndolo, se llega a la solución:

$$x = \frac{a-2}{a+1}, \quad y = \frac{2}{(a+1)}, \quad z = \frac{1}{(a+1)}$$

Por otro lado, si $a = 0$, la matriz de 7.5 es

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

por lo que, en tal caso, el sistema es compatible e indeterminado. La solución está dada por $(-1, 1, 0) + \mathbb{R} < (-1, 1, 1) >$.

Por último, si $a = 1$ la matriz de 7.5 es:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & x & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

En este último caso, el sistema es compatible e indeterminado. En este caso, la solución del sistema si $a = 1$ está dada por $\mathbb{R} < (-1, 2, 1) >$.

Resumiendo: el sistema no tiene solución si $a = -1$. Si $a = 0$ la solución está dada por $(-1, 1, 0) + \mathbb{R} < (-1, 1, 1) >$. Si $a = 1$ la solución es $\mathbb{R} < (-1, 2, 1) >$y en el resto de los casos la solución es:

$$x = \frac{a-2}{a+1}, \quad y = \frac{2}{(a+1)}, \quad z = \frac{1}{(a+1)}$$

7.5. Problemas propuestos

Problema 7.1 .- Probar, usando el Teorema de Rouché–Fröbenius, que la inversa de una matriz regular es única. (**Nota**: Interprétese la ecuación matricial como un conjunto de sistemas de ecuaciones lineales).

Problema 7.2 .- Un sistema de ecuaciones lineales se dice **sobredeterminado** si posee más ecuaciones que incógnitas y se dice **infradeterminado** si posee menos ecuaciones que incógnitas. Dar un ejemplo de sistema sobredeterminado con solución única. ¿Podemos encontrar un sistema infradeterminado con solución única? Explicar la respuesta.

Problema 7.3 .- Discutir y resolver, en su caso, los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y-z+t=0 \\ -x-y+z+t=0 \\ x-3y+5z+9t=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4x-y+2z+t=0 \\ 2x+3y-z-2t=0 \\ 7y-4z-5t=0 \\ 2x-11y+7z+8t=0 \end{array}\right.$$

Problema 7.4 .- Discutir según los valores de m y resolver, en su caso, los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-my+4z=0 \\ x+y+7z=0 \\ mx-y+13z=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} mx+y+z+t=m \\ x+my+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (m+2)x+(m+2)y+(m+1)z=2m+2 \\ x+my+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+y+z=m+1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (m+2)x+(2m+4)y+(3m+6)z=0 \\ (m+2)x+(m+2)y+(3m+6)z=-(m+2) \\ (m+2)x+(3m+6)y+(3m+6)z=m+2 \\ (m+2)x+(3m+6)y+(4m+5)z=4m+2 \end{array}\right.$$

Problema 7.5 .- Discutir según los valores de a y resolver, en su caso, los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y-4z=a+1 \\ -x+5y-z=a-12 \\ x+6y-5z=a+2 \\ 2x-4y+5z=a \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} ax + y + z + t = a \\ x + ay + z + t = a \\ x + y + az + t = a \\ x + y + z + at = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+2)x + y + z = a - 1 \\ ax + (a-1)y + z = a - 1 \\ (a+1)x + (a+1)z = a - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4-a)x + 2y + z = 0 \\ 2x + (4-a)y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + (8-a)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4a+12)x + (2a+13)y + (2a+6)z = 7 - a \\ (2a+6)x + (4a+5)y + (a+3)z = 4a \\ (2a+6)x + (2a+6)y + (a+3)z = a + 3 \\ (3a+6)x + (2a+6)y + (a+3)z = 0 \end{cases}$$